GENERALITES

Métrologie

La métrologie est la partie de la physique qui concerne la mesure des grandeurs.

1. Systèmes d'unités

Soit G une grandeur physique, elle s'exprimera par sa mesure dans une unité :

$$Grandeur = mesure \times unité$$

Un système d'unités comprend des unités fondamentales choisies arbitrairement et des unités dérivées déduites des précédentes à partir des relations de définition.

Les grandeurs fondamentales que nous allons considérer ici sont celles du système international d'unités : la longueur L, la masse M, le temps T, etc.…

Dans le système de grandeurs fondamentales L, M, T, … les relations de la physique peuvent s'écrire sous la forme d'une équation aux dimensions :

$$G = L^{\alpha} \cdot M^{\beta} \cdot T^{\gamma} ...$$

Exemple de quelques grandeurs physiques dans le système international *S.I* :

Grandeurs fondamentales :

Grandeurs physiques		***Unités***		***équations aux dimensions***
nom	***symbole***	***nom***	***symbole***	
longueur	l	*mètre*	*m*	L
masse	m	*kilogramme*	*kg*	M
temps	t	*seconde*	*s*	T

Grandeurs dérivées :

Grandeurs physiques		***Unités***		***équations aux dimensions***
nom	***symbole***	***nom***	***symbole***	
vitesse linéaire	v	*mètre par seconde*	$m\ s^{-1}$	$L\ T^{-1}$
vitesse angulaire	ω	*radian par seconde*	$rad\ s^{-1}$	T^{-1}
force	F	*newton*	N	$L\ M\ T^{-2}$
puissance	P	*watt*	W	$L^2\ M\ T^{-3}$

2. Incertitude absolue et incertitude relative

Une mesure a est toujours accompagnée d'une ***incertitude absolue*** Δa.

$$a = (a_m \pm \Delta a) \; ; \; (a_m : \text{valeur mesurée})$$

signifie que la valeur de a est comprise dans l'intervalle:

$$a_m - \Delta a < a < a_m + \Delta a$$

Souvent l'incertitude absolue correspond à la plus petite graduation de l'instrument de mesure utilisé. Elle est donc liée à la qualité et au prix de ce dernier.
Exemples:

$$d = (354 \pm 3)\,[km] \Rightarrow 351[km] < d < 357[km]$$

$$m = (5{,}25 \pm 0{,}02)\,[kg] \Rightarrow 5{,}23[kg] < m < 5{,}27[kg]$$

L'incertitude relative $\Delta a/a$ est le quotient de l'erreur absolue par la valeur mesurée.
Exemple:

$$m = (25{,}4 \pm 0{,}2)\,[m] \Rightarrow \Delta m/m = 0{,}2/25{,}4 = 0{,}08\%$$

Calcul de l'incertitude :

La grandeur expérimentale est différenciée par rapport à chacune des grandeurs, considérées comme indépendantes. Dans le cas de produits ou de quotients il est rapide d'effectuer cette différenciation en passant par les logarithmes.
Exemple :

$$G = \frac{A+B}{C} D$$

On différencie

$$dG = \frac{D}{C}\,dA + \frac{D}{C}\,dB - \frac{A+B}{C^2}D\,dC + \frac{A+B}{C}\,dD$$

On trouve

$$\frac{dG}{G} = \frac{1}{A+B}\,dA + \frac{1}{A+B}\,dB - \frac{1}{C}\,dC + \frac{1}{D}\,dD$$

Le passage aux incertitudes correspond au passage à la plus grande valeur possible en valeur absolue de tous les coefficients multiplicatifs, soit ici

$$\frac{\Delta G}{G} = \left|\frac{1}{A+B}\right| dA + \left|\frac{1}{A+B}\right| dB + \left|-\frac{1}{C}\right| dC + \left|\frac{1}{D}\right| dD$$

Outils mathématiques

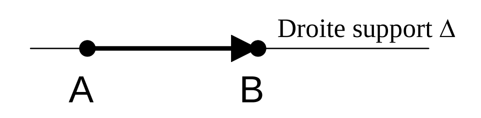
Calcul vectoriel

3. Les vecteurs : définitions

3.1. Définitions

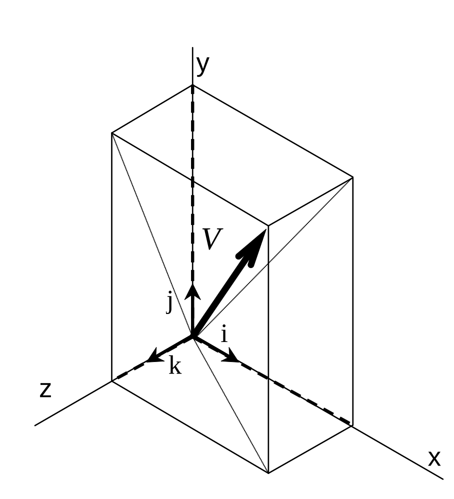
Un *scalaire* est un nombre réel, pouvant être utilisé pour mesurer une grandeur (vitesse, température, durée, etc.)

Un *vecteur* est une représentation graphique, dans le plan ou l'espace, délimitée par une origine et une extrémité.



Un *vecteur* est défini par :

- son point d'application : *A*
- sa direction : *droite Δ*
- son sens : *de A vers B*
- sa norme (ou intensité) : *d(A,B)*



Soit *R* un repère orthonormé direct, de vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Soit $\vec{V}$ un vecteur de coordonnées cartésiennes *a*, *b* et *c*. Il existe plusieurs notations :

$\vec{V}\,(a,b,c)$ $\qquad \vec{V}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{V}\left|\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}\right.$ $\qquad \vec{V} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j} + c\,\vec{k}$

3.2. Vecteur libre, vecteur lié

Un vecteur est dit *libre* lorsqu'il n'est défini que par sa direction, son sens et son intensité.

Un vecteur est nommé *vecteur glissant* (ou *glisseur*) lorsqu'on impose sa droite support.

Un vecteur est dit *lié* lorsqu'on fixe son origine (point d'application).

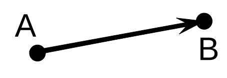
3.3. Norme d'un vecteur

Soit un vecteur $\vec{V}$ (*a*,*b*,*c*). Sa norme se note $\|\vec{V}\|$

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

3.4. Calcul à partir des coordonnées de deux points

Soient le point $A\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix}$ l'origine d'un vecteur libre $\vec{V}$, et le point $B\begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{pmatrix}$ l'extrémité de ce vecteur.



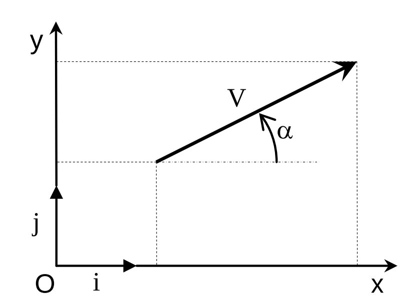
$$\vec{V}\begin{pmatrix} X_B - X_A \\ Y_B - Y_A \\ Z_B - Z_A \end{pmatrix}$$

$\vec{V}$ peut se noter également $\overrightarrow{AB}$.

3.5. Propriétés

- Relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{AB} = - \overrightarrow{BA}$

3.6. Projection d'un vecteur dans un repère plan



Exprimer les coordonnées de $\vec{V}$ en fonction de $\|\vec{V}\|$ et de α dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ revient à *projeter* le vecteur $\vec{V}$:

$$\vec{V}\begin{pmatrix} \|\vec{V}\|.\cos\alpha \\ \|\vec{V}\|.\sin\alpha \end{pmatrix}$$

Cette expression est valable si α est mesuré entre l'axe x et le vecteur $\vec{V}$ dans le sens trigonométrique.

3.7. Vecteur nul

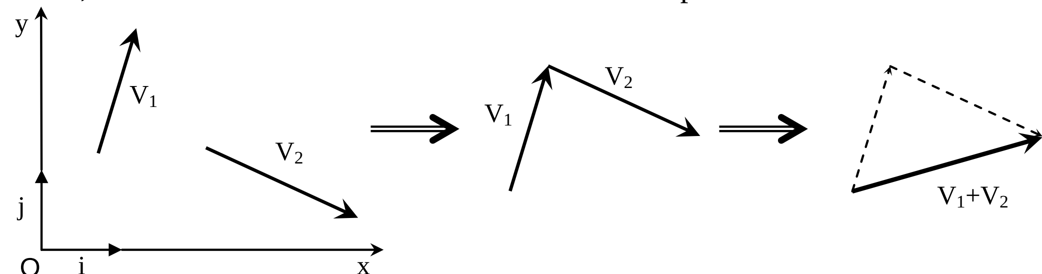
Un vecteur dont l'origine et l'extrémité sont confondues est appelé *vecteur nul*. Il est noté $\vec{0}(0,0,0)$.

4. Opérations sur les vecteurs

4.1. Somme et soustraction de vecteurs

Soient $\vec{V_1}\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{V_2}\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{V_1+V_2}\begin{pmatrix} X_1+X_2 \\ Y_1+Y_2 \\ Z_1+Z_2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{V_1-V_2}\begin{pmatrix} X_1-X_2 \\ Y_1-Y_2 \\ Z_1-Z_2 \end{pmatrix}$

Graphiquement, faire la somme de deux vecteurs revient à les placer bout à bout :

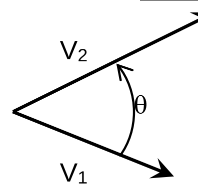


La somme de vecteurs est commutative : $\vec{V_1} + \vec{V_2} = \vec{V_2} + \vec{V_1}$.

4.2. *Produit d'un vecteur par un scalaire*

Multiplier un vecteur $\vec{V}$ par un scalaire k revient à additionner k fois le vecteur $\vec{V}$.
Exemple : $3\vec{V} = \vec{V} + \vec{V} + \vec{V}$

4.3. *Produit scalaire de deux vecteurs*



Le produit scalaire de deux vecteurs est un ***scalaire*** :

$$\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = \|V_1\|.\|V_2\|.\cos(\theta)$$

Remarques :

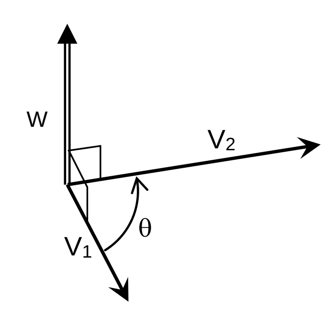
- Le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est toujours nul.
- Attention, le produit scalaire se note '$\vec{V_1} \cdot \vec{V_2}$' (point).

Soient : $\vec{V_1}\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{V_2}\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}$ alors : $\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = X_1.X_2 + Y_1.Y_2 + Z_1.Z_2$

4.4. *Produit vectoriel de deux vecteurs*

Le produit vectoriel se note $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$. Le résultat est un **vecteur**.

Soient $\vec{V_1}\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{V_2}\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}$, $\vec{W} = \vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$




$\vec{W}$ est défini par :

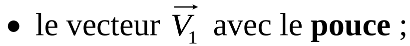


- sa direction, perpendiculaire au plan formé par $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$;
- son sens, tel que le trièdre $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$, $\vec{W}$ soit direct ;
- sa norme, $\|\vec{W}\| = \|\vec{V_1}\|.\|\vec{V_2}\|.\sin(\theta)$.

$$\vec{W} \left| \begin{array}{l} Y_1.Z_2 - Z_1.Y_2 \\ Z_1.X_2 - X_1.Z_2 \\ X_1.Y_2 - Y_1.X_2 \end{array} \right.$$

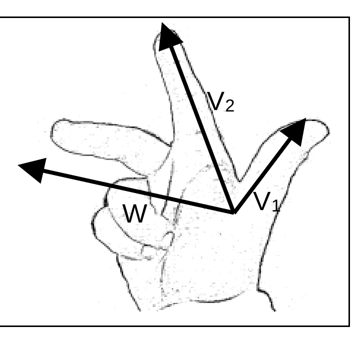
Attention !
$\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = - \vec{V_2} \wedge \vec{V_1}$

Trièdre direct :
En utilisant la **main droite**, on peut modéliser :



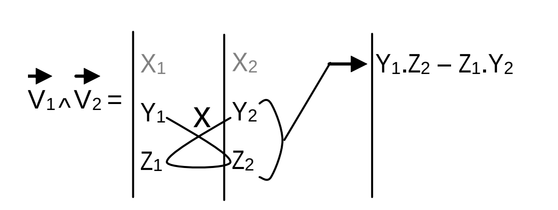
- le vecteur $\vec{V_1}$ avec le **pouce** ;
- le vecteur $\vec{V_2}$ avec l'**index** ;

Le **majeur** donne alors le sens de $\vec{W}$, résultat du produit vectoriel $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$



Méthode pratique pour appliquer le produit vectoriel :

On effectue le « produit en croix ».



$\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} =$ | X_1 | X | X_2 | $Y_1.Z_2 - Z_1.Y_2$
| Y_1 | | Y_2 | $Z_1.X_2 - X_1.Z_2$
| Z_1 | | Z_2 |
| X_1 | | X_2 |

$$\vec{V_1}\wedge\vec{V_2} = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ Y_1 & Y_2 \\ Z_1 & Z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Y_1.Z_2 - Z_1.Y_2 \\ Z_1.X_2 - X_1.Z_2 \\ X_1.Y_2 - Y_1.X_2 \end{vmatrix}$$

Exemples :

$$\vec{V}_1 \begin{vmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{vmatrix} \qquad \vec{V}_2 \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix} \qquad \vec{W} \begin{vmatrix} (-2)x(-2) - 3x1 = 1 \\ (3x2) - (6x(-2)) = 18 \\ (6x1) - ((-2)x2) = 10 \end{vmatrix}$$

2.5. ***Produit mixte***

Le produit mixte de trois vecteurs est le scalaire noté

$$\left(\vec{A},\vec{B},\vec{C}\right) = \vec{A}\cdot\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

Le produit mixte possède toutes les propriétés du déterminant:
il change de signe si on permute deux vecteurs,
il s’annule si deux au moins des vecteurs sont identiques….

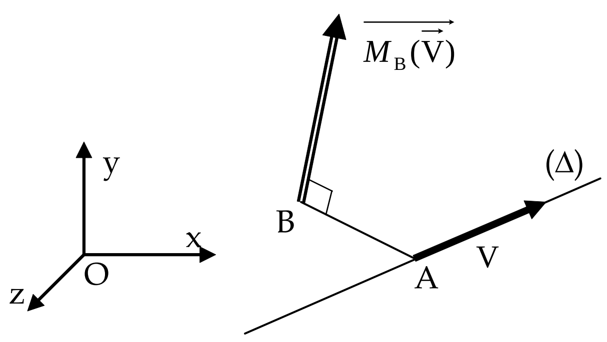
2.6. ***Double produit vectoriel***

Le double produit vectoriel est le vecteur qui s’écrit

$$\vec{A}\wedge\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right) = \left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B} - \left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}$$

5. ***Moment d’un vecteur***

5.1. ***Définition***



Le moment d’un vecteur $\vec{V}$ d’origine *A*, par rapport à un point de l’espace *B*, est le vecteur défini par la relation :

$$\boxed{\overrightarrow{M_B(\vec{V})} = \overrightarrow{BA}\wedge\vec{V}}$$

Ce moment est un vecteur lié dont les caractéristiques sont :

- son origine : le point *B*
- sa direction : la droite perpendiculaire au plan formé par $\overrightarrow{BA}$ et $\vec{V}$
- son sens : tel que le trièdre ($\overrightarrow{BA}, \vec{V}, \overrightarrow{M_B(\vec{V})}$) soit direct
- son intensité : $\left\|\overrightarrow{M_B(\vec{V})}\right\| = \left\|\overrightarrow{BA}\right\| . \left\|\vec{V}\right\| . \left|\sin(\overrightarrow{BA},\vec{V})\right|$.

Attention : Les caractéristiques du vecteur $\overrightarrow{M_B(\vec{V})}$ dépendent de la position du point *B*.

5.2. Relation de Varignon

Soit $\overrightarrow{M_A}(\vec{V})$ le moment exprimé au point A d'un vecteur $\vec{V}$.

On peut en déduire l'expression du moment de ce vecteur $\vec{V}$ en n'importe quel point B de l'espace :

$$\overrightarrow{M_B}(\vec{V}) = \overrightarrow{M_A}(\vec{V}) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{V}$$

6. Dérivée d'une fonction vectorielle

Soit $\vec{V}(t)$ une fonction vectorielle d'une seule variable scalaire t. La dérivée de $\vec{V}(t)$ est défini par :

$$\vec{V}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{V}(t+\Delta t) - \vec{V}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}(t)}{dt}$$

Propriétés :

- Si $\vec{V}(t)$ une fonction vectorielle constante alors $\vec{V}'(t) = \vec{0}$
- $\frac{d\left(\vec{V_1}(t) + \vec{V_2}(t)\right)}{dt} = \frac{d\vec{V_1}(t)}{dt} + \frac{d\vec{V_2}(t)}{dt}$
- $\frac{d\left(\vec{V_1}(t) \cdot \vec{V_2}(t)\right)}{dt} = \frac{d\vec{V_1}(t)}{dt} \cdot \vec{V_2}(t) + \vec{V_1}(t) \cdot \frac{d\vec{V_2}(t)}{dt}$
- $\frac{d\left(\vec{V_1}(t) \wedge \vec{V_2}(t)\right)}{dt} = \frac{d\vec{V_1}(t)}{dt} \wedge \vec{V_2}(t) + \vec{V_1}(t) \wedge \frac{d\vec{V_2}(t)}{dt}$


ETUSUP.com